**PRZYKŁAD 1**

Dla zdarzenia $A$ z przykładu 4, $n(A)=3$ i $n(\Omega)=8$, stąd $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{8}$

Dla zdarzenia $B$ z przykładu 5, $n(B)=6$ i $n(\Omega)=36$, stąd $P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Z powyższej definicji wynika, że prawdopodobieństwo jest liczbą mniejszą bądź równą 1. Wynika to stąd, że liczba zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu nie może przekroczyć liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Z drugiej strony, prawdopodobieństwo jest liczbą większą bądź równą 0. Wynika to stąd, że liczba zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu nie może być liczbą ujemną.

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo jest równe 1, nazywamy ***zdarzeniem pewnym***. A zdarzenie, którego prawdopodobieństwo jest równe 0, nazywamy ***zdarzeniem niemożliwym****.*

Zdarzenie *A'*, któremu odpowiadają wszystkie zdarzenia elementarne, które nie odpowiadają zdarzeniu *A* nazywamy ***zdarzeniem przeciwnym*** do *A*.

## Elementy kombinatoryki

W związku z tym, że w klasycznym podejściu do prawdopodobieństwa liczymy liczbę zdarzeń elementarnych, niezbędne stają się różne sposoby obliczania możliwych wyników poszczególnych doświadczeń. A więc teraz zajmiemy się elementami kombinatoryki, które posłużą temu celowi.

Jeżeli $n$ jest liczba naturalną, to symbol ***n!*** (*n* silnia) określamy w następujący sposób:

$$\begin{cases} 0!=1 \\ n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \quad \text{dla } n\ge 1 \end{cases}$$

Symbolem Newtona nazywamy wyrażenie $\binom{n}{k}$, które czytamy „*n po k*”, a obliczamy następująco:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

***Permutacją*** zbioru $n$ – elementowego nazywamy każdy $n$ – wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. Liczbę permutacji zbioru $n$ – elementowego wyrażamy wzorem:

$$P_n = n!$$

***Kombinacją*** $k$ – elementową ze zbioru $n$ – elementowego nazywamy dowolny podzbiór $k$ – elementowy danego zbioru $n$ – elementowego. Liczbę takich kombinacji wyrażamy wzorem:

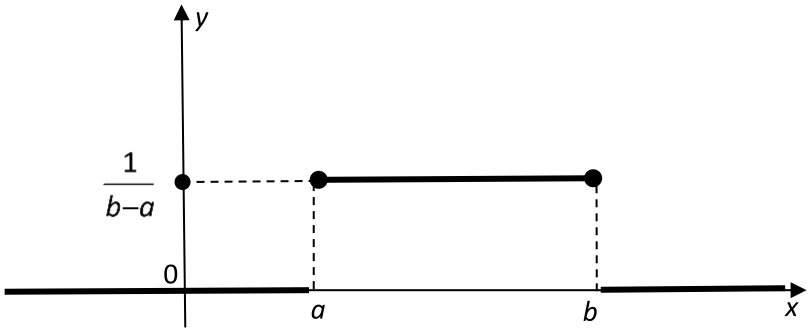
$$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

**PRZYKŁAD 2**

***Rozkład jednostajny*** (równomierny lub prostokątny)
Zmienna losowa *X* ma rozkład jednostajny w przedziale $(a,b)$, jeżeli ma gęstość $f(x)$ określoną wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{1}{b-a}, & a\le x\le b \\ 0, & x>b \end{cases}$$

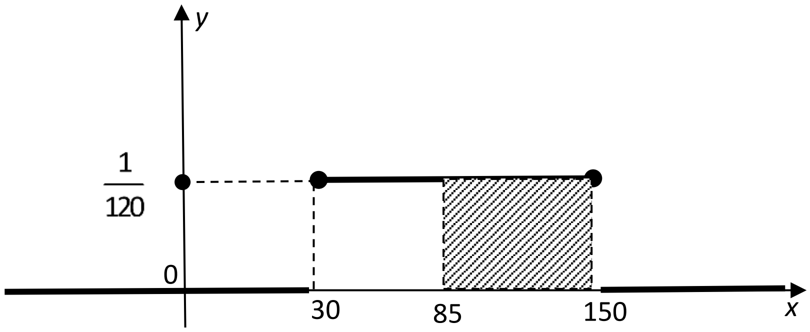
Wykres funkcji gęstości rozkładu jednostajnego przedstawiono poniżej.




Wartość oczekiwana i wariancja tego rozkładu wyrażają się następującymi wzorami:

$$EX=\frac{a+b}{2},\quad D^2X=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Przykład 28
Czas oczekiwania na wejście do śluzy jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym. Maksymalny czas oczekiwania wynosi 150 minut, a minimalny 30 minut. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na wejście do śluzy trzeba będzie czekać ponad 85 minut?




$P(X>85)$ geometrycznie oznacza to pole obszaru zakreskowanego na powyższym rysunku, czyli:

$$P(X>85)=\frac{1}{120}\cdot(150-85)=\frac{65}{120}\approx 0{,}542$$

**PRZYKŁAD 3**

## Równanie różniczki zupełnej

Każde równania rzędu pierwszego można zapisać w postaci różniczkowej:

$$dy - f(x,y)dx = 0 \tag{6.1}$$

lub po przemnożeniu przez pewną niezerową funkcję *N(x,y)*, w bardziej symetrycznej postaci:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{6.2}$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy lewa strona tego równania jest różniczką zupełną pewnej funkcji *U(x,y)*:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy. \tag{6.3}$$

W tym wypadku równanie (6.12) nazywany *równaniem różniczki zupełnej*.
Określa się kryterium, kiedy równanie: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ jest równaniem różniczki zupełnej:
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *jest równaniem różniczki zupełnej* $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$.
Schemat rozwiązania:

1. skoro (6.10) jest równaniem różniczki zupełnej to $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y)$ i można całkować względem zmiennej *x*, otrzymujemy wtedy:
$$u(x,y) = \int M(x,y)\mathrm{dx} + \varphi(y)$$
2. poszukując funkcji $\varphi(y)$ różniczkujemy po *y*:
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{dx} + \varphi'(y)$$

Z drugiej strony:

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{dx} + \varphi'(y)$$

3. otrzymane równanie całkujemy po *y*:
$$\varphi(y) = f(x,y) + C$$
4. wstawiamy do funkcji *u(x,y) z punktu 1.:*
$$u(x,y) = \int M(x,y)\mathrm{dx} + f(x,y) + C$$

*Przykład:* Rozpatrzmy równanie:

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$$

Rzeczywiście jest to równanie różniczki zupełnej:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Szukamy funkcji *U(x,y)*, t. że: $du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) = 2xy + 3y^2$$

Całkując po zmiennej *x*:

$$U(x,y) = \int (2xy + 3y^2)dx = x^2y + 3y^2 + \varphi(y)$$

Różniczkując po zmiennej *y*:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy + \varphi'(y) = N(x,y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

**PRZYKŁAD 4**

### Postać algebraiczna liczby zespolonej (część rzeczywista i urojona)

Każdą liczbę zespoloną można jednoznacznie zapisać w postaci:

$$z = x + yi, \quad gdzie: x, y \in R$$

,którą nazywamy postacią algebraiczną. Wówczas:

- liczbę x nazywamy częścią rzeczywistą liczby zespolonej z, co zapisujemy następująco:

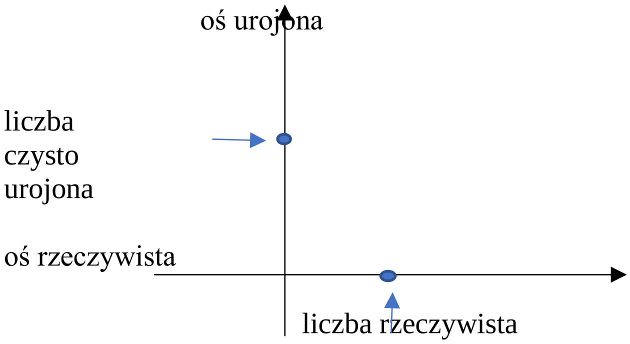
$$\mathrm{Re}(z) \overset{def}{=} x$$

- liczbę y nazywamy częścią urojoną liczby zespolonej z, co zapisujemy następująco:

$$\mathrm{Im}(z) \overset{def}{=} y$$

- liczbę zespoloną postaci $yi, \quad gdzie: y \in R \setminus \{0\}$, nazywamy czysto urojoną
- dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i urojone są równe ,tzn.:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$$




Rys. 9.2 Osie rzeczywista i urojona na płaszczyźnie zespolonej

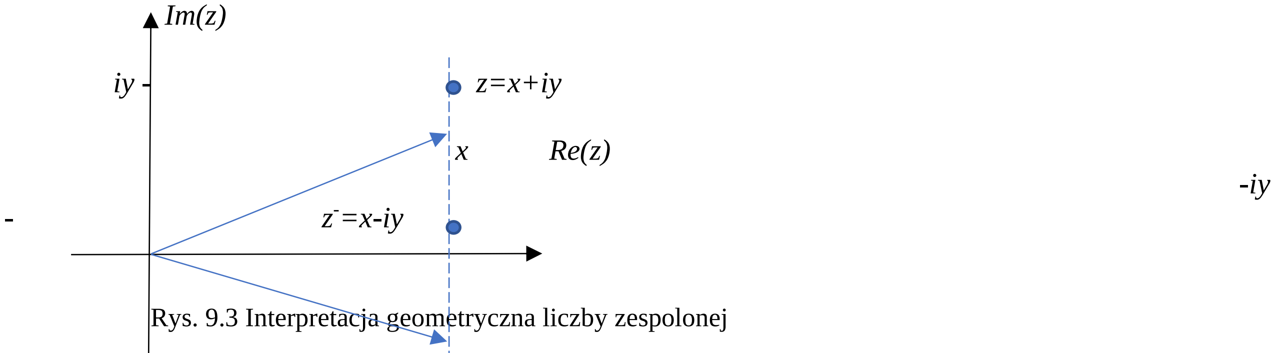
### Sprzężenie liczby zespolonej

**Definicja**

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + yi, \quad gdzie: x, y \in R$, nazywamy $\bar{z}$ i określamy wzorem:

$$\bar{z} = x - yi \qquad (9.3)$$

Liczba sprzężona do liczby zespolonej jest jej obrazem w symetrii osi Re(z).




Rys. 9.3 Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

**Własności**

Niech $z, z_1 z_2 \in C$. Wtedy:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$

5. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
6. $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

**PRZYKŁAD 5**

## Iloczyn skalarny wektorów

Kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiujemy jako kąt wyznaczony przez półproste wychodzące z punktu zaczepienia wektorów w kierunkach zgodnych z kierunkami i zwrotami tych wektorów.

Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest liczba określona równością:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right) \tag{10.1}$$

Iloczyn skalarny wektorów posiada następujące własności:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
3) jeżeli $\vec{a}\perp\vec{b}$, to $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
4) jeżeli $\vec{a}\parallel\vec{b}$, to $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$

Tw. Iloczyn skalarny można przedstawić w postaci kartezjańskiej:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{10.2}$$

Dowód:

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ przedstawionych w postaci kombinacji liniowej wersorów jest następujący:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right);$$

korzystając z własności 2 wymnażamy „wyraz po wyrazie” i otrzymujemy:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}$$

następnie wykorzystując własności 3 i 4 otrzymujemy:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

PRZYKŁAD 6

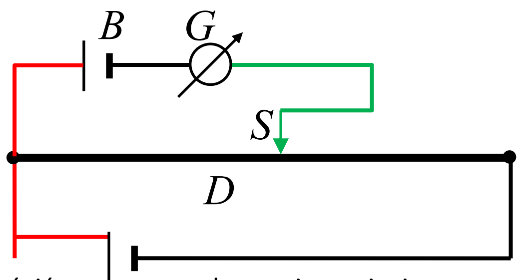
# Wyznaczanie siły elektromotorycznej ogniwa

## Przyrządy:

1. Zestaw badanych ogniw.
2. Wskaźnik zera (galwanometr).
3. Zasilacz stabilizowany ($U = 12$ V).
4. Źródło napięcia wzorcowego ($\varepsilon_0 = 2$ V).
5. Drut oporowy.

## Przebieg czynności:

1. Włączyć wskaźnik zera *G*, ustawić czułość pomiaru na „MAX”. Zewrzeć wychodzące ze wskaźnika zera przewody **czarny** i **zielony**. Przez obrót potencjometru „0” doprowadzić do wyzerowania wskaźnika. Zmniejszyć czułość pomiaru na „1”.
2. Stosując jako ogniwo $B$ źródło napięcia wzorcowego o znanej sile elektromotorycznej $\varepsilon_0 = 2$ V połączyć obwód elektryczny według schematu:




*B* – badane ogniwo

*G* – wskaźnik zera

*D* – drut oporowy

Zwrócić uwagę na polaryzację napięcia: **czarny** przewód ***wskaźnika zera G*** łączymy z „**—**” ogniwa *B*, a **zielony** przewód podłączamy do suwaka *S.*

3. Włączyć zasilacz stabilizowany.
4. Przez przesunięcie suwaka wyzerować wskaźnik zera. Odczytać położenie $x_0$ suwaka.
5. Czynności opisane w punktach 2–4 powtórzyć dla ogniwa $B_1$, $B_2$, baterii zbudowanej z ogniw $B_1$ i $B_2$ połączonych szeregowo oraz baterii zbudowanej z ogniw $B_1$ i $B_2$ połączonych równolegle.
6. Ze wzoru

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{x}{x_0}$$

obliczyć SEM badanych ogniw i baterii.

**PRZYKŁAD 7**

# Wyznaczanie współczynnika załamania cieczy za pomocą refraktometru Abbego

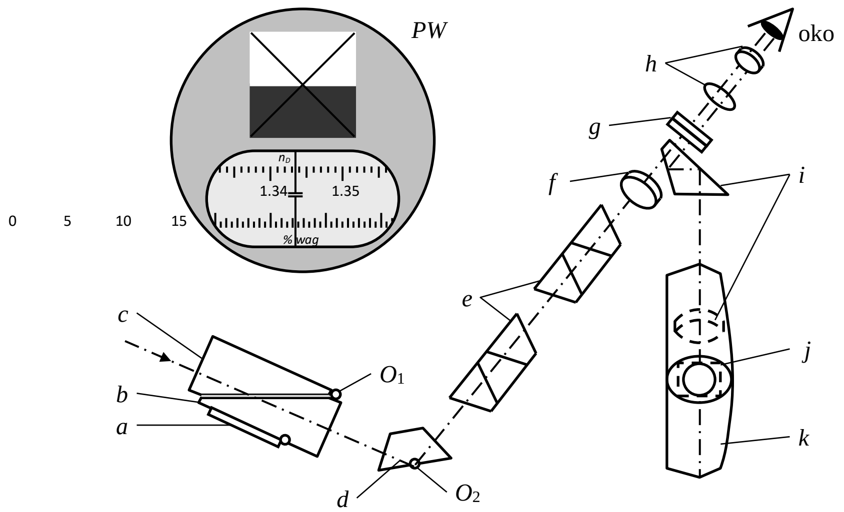
## Cel:

- ❖ Poznanie zjawisk optycznych zachodzących na granicy dwóch ośrodków przeźroczystych.
- ❖ Wyznaczenie współczynnika załamania światła i średniej dyspersji metodą całkowitego wewnętrznego odbicia.

## Pytania kontrolne:

- Prawa odbicia i załamania światła.
- Zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia.
- Definicja współczynnika załamania światła, dyspersji i zdolności łamiącej pryzmatu.
- Budowa refraktometru Abbego i zasada pomiaru współczynnika załamania cieczy oraz średniej dyspersji.

Narysować załamanie promienia białego światła, padającego pod kątem $\alpha = 60^{\circ}$ w trzech przedstawionych przypadkach (w szczególności zaznaczyć promienie czerwone i fioletowe):




Rys. 1. Schemat optyczny refraktometru:
a) zwierciadło, b) pryzmat refraktometryczny, c) pryzmat oświetlający, d) pryzmat kierujący,
e) pryzmat Amiciego, f) obiektyw, g) przesłona, h) okular, i) układ odczytowy, j) układ oświetlający,
k) płytka z podziałką, $O_1$) oś obrotowa pryzmatu oświetlającego, $O_2$) oś obrotowa pryzmatu kierującego.
*PW* – pole widzenia okularu (współczynnikowi załamania roztworu $n_D$ = 1,3435 odpowiada stężenie wagowe cukru $c$ = 7,2%)

PRZYKŁAD 8

# Pomiary podstawowych parametrów napięć przemiennych za pomocą oscyloskopu

## Cel:

- Zapoznanie się z budową i zasadą działania oscyloskopu.
- Wyznaczenie parametrów napięcia przemiennego.

## Pytania i zagadnienia kontrolne:

- Budowa i zasada działania oscyloskopu katodowego.
- Co to jest podstawa czasu i wzmocnienie oscyloskopu?
- Opisać zasadę pomiaru amplitudy i okresu napięcia zmiennego za pomocą oscyloskopu.
- Podstawowe cechy napięcia przemiennego: częstotliwość, napięcie maksymalne i napięcie skuteczne.

## Opis ćwiczenia:

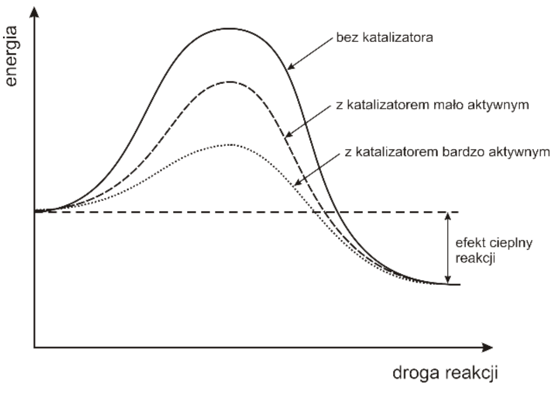
Wykonanie ćwiczenia rozpoczynamy od zapoznania się elementami regulacyjnymi stosowanego w ćwiczeniu oscyloskopu. Szczególną uwagę zwracamy na położenie przełączników regulacji czułości wejściowej i okresu podstawy czasu oraz pokręteł regulacji położenia obserwowanych przebiegów.

Podłączamy do oscyloskopu badany sygnał sinusoidalny i wyznaczamy jego podstawowe parametry: amplitudę, napięcie skuteczne, okres, częstotliwość oraz ich niepewności pomiarowe

PRZYKŁAD 9

## Kataliza i katalizatory

**Katalizatorem nazywa się substancję, której obecność w mieszaninie reagentów zwiększa szybkość reakcji, a inhibitorem – substancję, której obecność powoduje obniżenie szybkości reakcji. Na rys. 1 przedstawiono wpływ katalizatora na energie aktywacji.**




Rys. 1. Wpływ katalizatora na energię aktywacji

**Działanie katalizatora polega na „zamianie” reakcji o dużej energii aktywacji Ea (bez katalizatora) na dwie, lub więcej, reakcji o mniejszej energii aktywacji. Innymi słowy droga od substratów do produktów zostaje zamieniona na ciąg reakcji elementarnych z udziałem katalizatora, o niskich energiach aktywacji poszczególnych etapów.**